c) $f_n'(x) = -\frac{x^n}{n!}e^{-x} \le 0$, $\forall x \in [0, +\infty[$

x	0	$+\infty$
$f_n'(x)$	−	
$f_n(x)$	1 ↘	0

2) a) $0 \le x \le 1 \Rightarrow 0 \le x^n \le 1$

$-1 \le -x \le 0 \Rightarrow 0 \le e^{-x} \le 1$

D'où : $0 \le x^n e^{-x} \le 1$

$\Rightarrow -\frac{1}{n!} \le -\frac{x^n}{n!}e^{-x} \le 0$

$\Rightarrow -\frac{1}{n!} \le f_n'(x) \le 0$

b) On a: f est continue sur $[0, 1]$

f est dérivable sur $]0, 1[$

et $-\frac{1}{n!} \le f_n'(x) \le 0$, $\forall x \in]0, 1[$

Donc d'après le théorème des inégalités des accroissements finis :

$-\frac{1}{n!}x \le f_n(x) - f_n(0) \le 0$, $\forall x \in]0, 1[$

Or $-\frac{1}{n!}x \ge -\frac{1}{n!}$

D'où $-\frac{1}{n!} \le f_n(x) - 1 \le 0$

3) pour $x \in [0, 1]$ on a :

$-\frac{1}{n!} \le f_n(x) - 1 \le 0$

Pour $x = 1$

$-\frac{1}{n!} \le f_n(1) - 1 \le 0$

$\Rightarrow 1 - \frac{1}{n!} \le f_n(1) \le 1$

or $\ell\lim\ 1 - \frac{1}{n!} = 1 \Rightarrow \ell\lim f_n(1) = 1$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} (\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}) e^{-1} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$

Partie B $n \ge 2$

$U_n = (1 - \frac{1}{n})^n$, $a_n = \text{Ln}(U_n)$

1) $a_n = \text{Ln}[(1 - \frac{1}{n})^n] = n\,\text{Ln}(1 - \frac{1}{n})$

$= \frac{Ln(1-\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = -\frac{Ln(1-\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}$

2) $a_n = g(-\frac{1}{n})$ avec $g(x) = -\frac{Ln(1+x)}{x}$

$\lim_{n\to+\infty} (-\frac{1}{n}) = 0$ et $\lim_{x\to 0} g(x) = -1$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = -1$

3) $a_n = \text{Ln}(U_n) \Rightarrow U_n = e^{a_n}$

$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} e^{a_n} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

EX38

$f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$

Partie A

2) a) * pour $x \in Df = \text{IR}$ on a $(-x) \in Df$

$* f(x) + f(-x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} + \frac{3e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1}$

$= \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} + \frac{3 - e^x}{1 + e^x} = \frac{2(e^x + 1)}{e^x + 1} = 2$

D'où $f(-x) = 2 - f(x)$

Et par suite $A(1, 0)$ est un centre de symétrie pour (ξ)

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn